ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

VÀNG VĂN HÀ

VỀ TOÁN TỬ CHIẾU METRIC LÊN TẬP LỒI ĐÓNG VÀ ỨNG DỤNG VÀO BÀI TOÁN BẤT ĐẲNG THỨC BIẾN PHÂN

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

THÁI NGUYÊN - 2020

ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

---------------- ---------------

VÀNG VĂN HÀ

VỀ TOÁN TỬ CHIẾU METRIC LÊN TẬP LỒI ĐÓNG VÀ ỨNG DỤNG VÀO BÀI TOÁN BẤT ĐẲNG THỨC BIẾN PHÂN

Chuyên ngành: Toán ứng dụng
Mã số : 8 46 01 12

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

NGƯỜI HƯỚNG DẪN KHOA HỌC
GS.TSKH. Lê Dũng Mưu

THÁI NGUYÊN - 2020

Mục lục

Bảng ký hiệu

$\mathbb{R}$	tập số thực
$\mathbb{R}^n$	không gian Euclide n-chiều
$\emptyset$	tập rỗng
$\forall x$	với mọi x
$\exists x$	tồn tại x
$\|x\|$	chuẩn của vectơ x
$\langle x, y\rangle$	tích vô hướng của hai véc-tơ x và y
$\|x\|$	chuẩn của véc-tơ x
$VIP(F;C)$	bài toán bất đẳng thức biến phân
$S(F;C)$	tập nghiệm của bài toán $VIP(F;C)$

Lời cảm ơn

Luận văn được hoàn thành tại Trường Đại học Khoa học - Đại học Thái Nguyên dưới sự hướng dẫn của GS.TSKH. Lê Dũng Mưu. Tác giả xin bày tỏ lòng biết ơn sâu sắc tới Thầy, người đã dành nhiều thời gian, tận tình hướng dẫn và giúp đỡ tác giả trong suốt quá trình nghiên cứu và hoàn thiện luận văn. Tác giả cũng xin bày tỏ lòng biết ơn chân thành tới các Thầy Cô trong khoa Toán-Tin trường Đại học Khoa học, Đại học Thái Nguyên đã giảng dạy và giúp đỡ cho tác giả trong suốt thời gian học tập tại Trường.

Đồng thời, tôi cũng xin gửi lời cảm ơn tới gia đình, bạn bè và đồng nghiệp đã tạo điều kiện thuận lợi nhất cho tôi trong thời gian học tập và trong quá trình hoàn thành luận văn.

Xin chân thành cảm ơn!

Thái Nguyên, tháng 05 năm 2020.

Tác giả

Vàng Văn Hà

Lời nói đầu

Trong chương trình toán phổ thông, chúng ta đã làm quen với phép chiếu vuông góc xuống một mặt phẳng trong khi giải các bài toán hình học và lượng giác. Khái niệm này đã được mở rộng lên không gian nhiều chiều, thậm chí vô hạn chiều cùng với việc thay mặt phẳng bằng một tập lồi đóng và với một khoảng cách (metric) không nhất thiết là khoảng cách Ơ-cơ-lit. Ánh xạ chuyển một điểm bất kỳ cho trước trong không gian đến một điểm trong một tập cho trước với khoảng cách nhỏ nhất được gọi là toán tử chiếu lên tập đó. Người ta đã chỉ ra rằng, trong không gian Hilbert thực, toán tử chiếu lên một tập lồi đóng được xác định duy nhất.

Toán tử chiếu chiếu lên tập lồi đóng có nhiều đặc trưng thú vị, do đó nó có vai trò quan trọng trong nhiều vấn đề của toán học và thực tế như trong lý thuyết xấp xỉ, tối ưu hóa, bất đẳng thức biến phân, cân bằng và nhiều lĩnh vực khác.

Nội dung của bản luận văn bao gồm các kiến thức cơ bản nhất về tập lồi trong không gian Ơ-cơ-lit $\mathbb{R}^n$, các kết quả về toán tử chiếu lên tập lồi đóng. Nội dung chính tiếp theo liên quan đến việc áp dụng toán tử chiếu vào việc giải bài toán bất đẳng thức biến phân para-đơn điệu trong không gian $\mathbb{R}^n$.

Ngoài phần mở đầu, kết luận và tài liệu tham khảo, các kết quả nghiên cứu trong bản luận văn được trình bày thành hai chương với tiêu đề:

Chương 1: Một số kiến thức chuẩn bị.

Chương 2: Ứng dụng vào bài toán bất đẳng thức biến phân.

Nội dung chính của các chương như sau:

Trong chương 1, tôi trình bày định nghĩa tập lồi, một số tính chất cơ bản của tập lồi, hàm lồi. Tiếp theo là trình bày định lý tách các tập lồi. Một phần của chương trình bày về định nghĩa toán tử chiếu, một số tính chất cơ bản của toán tử chiếu.

Chương 2 của luận văn trình bày ứng dụng của toán tử chiếu metric lên một tập lồi đóng vào việc giải bài toán bất đẳng thức biến phân. Bất đẳng thức biến phân là một lớp bài toán quan trọng của Giải tích ứng dụng. Bài toán này là một lớp bài toán tổng quát của bài toán quy hoạch lồi; hơn nữa nhiều bài toán trong phương trình vi phân, đạo hàm riêng đều có thể mô tả dưới bài toán bất đẳng thức biến phân.

Chương 1. Một số kiến thức chuẩn bị

Nội dung chính của chương trình bày định nghĩa, một số tính chất cơ bản, định lý và bổ đề liên quan đến tập lồi và hàm lồi. Một phần của chương đề cập đến phép chiếu metric, chứng minh sự tồn tại và tính duy nhất của hình chiếu lên một tập lồi đóng và khảo sát một số tính chất cơ bản của toán tử chiếu. Nội dung chính của chương này được tham khảo chủ yếu từ các tài liệu [1, 3].

1.1 Tập lồi và hàm lồi

Trước hết, chúng tôi giới thiệu khái niệm về tập lồi và một số tính chất cần thiết.

Nhắc lại rằng, một *đường thẳng* nối hai điểm (hai véc-tơ) a, b trong $\mathbb{R}^n$ là tập hợp tất cả các véc-tơ $x \in \mathbb{R}^n$ có dạng

$$\{x \in \mathbb{R}^n | x = \alpha a + \beta b, \alpha, \beta \in \mathbb{R}^n, \alpha + \beta = 1\}.$$

Đoạn thẳng nối hai điểm a và b trong $\mathbb{R}^n$ là tập hợp các véc-tơ x có dạng

$$\{x \in \mathbb{R}^n | x = \alpha a + \beta b, \alpha \geq 0, \beta \geq 0, \alpha + \beta = 1\}.$$

Định nghĩa 1.1. Một tập $C \subseteq \mathbb{R}^n$ được gọi là một *tập lồi*, nếu C chứa mọi đoạn thẳng đi qua hai điểm bất kỳ của nó. Tức là C lồi khi và chỉ khi

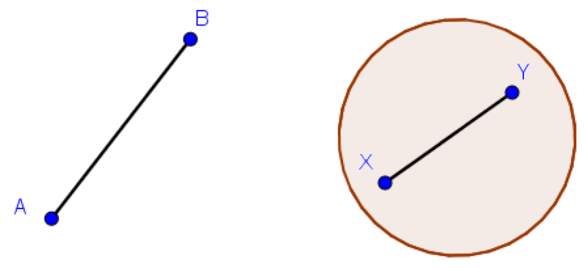
$$\forall x, y \in C, \forall \lambda \in [0,1] \Rightarrow \lambda x + (1-\lambda)y \in C.$$

Ví dụ 1.1.

a) Tập $\emptyset$ và $\mathbb{R}^n$ là các tập con lồi của $\mathbb{R}^n$.

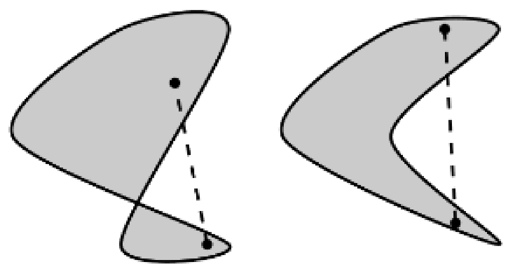
Đoạn thẳng AB là một tập lồi.

Hình tròn bao gồm cả biên màu nâu là một tập lồi, vì đoạn thẳng nối hai điểm X, Y trong hình tròn nằm trọn vẹn trong hình tròn.



Hình 1.1: Tập lồi

b) Hình dưới đây là hai tập không lồi, vì các đường nét đứt chứa nhiều điểm không nằm trong các tập đó.



Hình 1.2: Tập không lồi

Định nghĩa 1.2. Ta nói x là *tổ hợp lồi* của các điểm $x^1, \ldots, x^k$ nếu

$$x = \sum_{j=1}^{k} \lambda_j x^j, \lambda_j > 0 \ \forall j = 1, \ldots, k, \ \sum_{j=1}^{k} \lambda_j = 1.$$

Mệnh đề 1.1. *Tập hợp C là lồi khi và chỉ khi nó chứa mọi tổ hợp lồi của các điểm của nó. Tức là: C lồi khi và chỉ khi*

$$\forall k \in \mathbb{N}, \forall \lambda_1, \ldots, \lambda_k > 0 : \sum_{j=1}^{k} \lambda_j = 1, \forall x^1, \ldots, x^k \in C \Rightarrow \sum_{j=1}^{k} \lambda_j x_j \in C.$$

Chứng minh. Điều kiện đủ là hiển nhiên từ định nghĩa. Ta chứng minh điều kiện cần bằng quy nạp theo số điểm. Với $k = 2$, điều cần chứng minh suy ra ngay từ định nghĩa của tập lồi và tổ hợp lồi. Giả sử mệnh đề đúng với $k - 1$ điểm. Ta cần chứng minh với k điểm.

Giả sử x là tổ hợp lồi của k điểm $x^1, \ldots, x^k \in C$. Tức là

$$x = \sum_{j=1}^{k} \lambda_j x^j, \lambda_j > 0 \ \forall j = 1, \ldots, k, \sum_{j=1}^{k} \lambda_j = 1.$$

Đặt

$$\xi = \sum_{j=1}^{k-1} \lambda_j.$$

Khi đó $0 < \xi < 1$ và

$$\begin{aligned} x &= \sum_{j=1}^{k-1} \lambda_j x^j + \lambda_k x^k \\ &= \xi \sum_{j=1}^{k-1} \frac{\lambda_j}{\xi} x^j + \lambda_k x^k. \end{aligned} \tag{1.1}$$

Do

$$\sum_{j=1}^{k-1} \frac{\lambda_j}{\xi} = 1$$

và $\frac{\lambda_j}{\xi} > 0$ với mọi $j = 1, \ldots, k-1$, nên theo giả thiết quy nạp, điểm

$$y := \sum_{j=1}^{k-1} \frac{\lambda_j}{\xi} x^j \in C.$$